数理解析研究所講究録
87巻 1970年 61-91

Subharmonic Solutions to Weakly Nonlinear Duffing's Equation

京大 数解研 占部 実

1. まえがきと定理

Duffingの方程式とはつぎの方程式をいう：

$$\frac{d^2q}{d\tau^2}+\alpha\frac{dq}{d\tau}+\kappa^2 q(1+\beta q^2)=P\cos\gamma\tau.$$

これは変数変換

$$\kappa\tau=t,\quad \frac{\kappa^2}{P}q=x,\quad \frac{\alpha}{\kappa}=\sigma,\quad \frac{\beta P^2}{\kappa^4}=\varepsilon,\quad \frac{\gamma}{\kappa}=\omega$$

を行うと，つぎのようになる：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\sigma\frac{dx}{dt}+x(1+\varepsilon x^2)=\cos\omega t.$$

ここで，ωt を t でおきかえると，

$$(\mathrm{E}_0)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\sigma}{\omega}\frac{dx}{dt}+\frac{1}{\omega^2}x(1+\varepsilon x^2)=\frac{1}{\omega^2}\cos t$$

を得る．(E_0) の周期解で正の最小周期が $2p\pi$ であるも

のを，$1/p$－次の subharmonic solution という．ただし，pは1より大きい正の整数である．

最近，筆者はつぎの定理を得たので，ここでその証明を述べる．

定理 "$|\varepsilon|$，$\sigma(>0)$が十分小さいときは，$\varepsilon\to 0$のとき $|x|\to\infty$ あるいは $|dx/dt|\to\infty$ となるものを除けば，$0<\omega-3\ll 1$ のときにのみ subharmonic solution が存在し，しかもその次数は$1/3$のものに限られる．

$\sigma=0$のときは，generic な subharmonic solution に関する限り同じことが成り立つ．

$0<\omega-3\ll 1$ のとき，

$$(1\cdot 1)\qquad 1-\left(\frac{3}{\omega}\right)^2=\varepsilon\kappa,\qquad \sigma=\frac{1}{3}\varepsilon\omega\sigma_1$$

とおけば，$\varepsilon\to 0$のとき $|x|\to\infty$ あるいは $|dx/dt|\to\infty$ となるものを除けば，(E_0)の $1/3$-次の subharmonic solutions は

$$(1\cdot 2)\qquad x=x_i(t)=u_i\cos\frac{t}{3}+\frac{32}{9}\sigma_1\sin\frac{t}{3}-\frac{1}{8}\cos t+O(\varepsilon)+O(\sigma_1^2)\qquad (i=1,2),$$

および　$x=x_i(t+2\pi)$, $x_i(t+4\pi)$　$(i=1, 2)$ の6個から成る．ただし

$$(1\cdot3)\quad \begin{cases} u_1=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{8}+\sqrt{\dfrac{16}{3}\left(\kappa-\dfrac{21}{1024}\right)}\right], \\ u_2=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{8}-\sqrt{\dfrac{16}{3}\left(\kappa-\dfrac{21}{1024}\right)}\right]. \end{cases}$$

$i=1$　に対応する解は，$\sigma>0$　のとき，ε の正，負に応じて正または負に漸近安定で，$\sigma=0$ のときは中立安定であり，$i=2$　に対応する解は不安定である．

なお，$\sigma>0$ のときは，

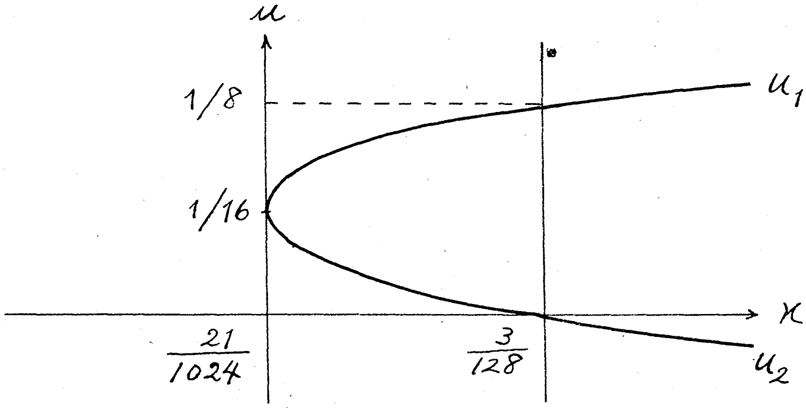
$$(1\cdot4)\quad x_i(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{1}{3}(2n-1)t+b_n\sin\frac{1}{3}(2n-1)t\right] \qquad (i=1, 2)$$

の形で，$\sigma=0$ のときは，

$$(1\cdot5)\quad x_i(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{1}{3}(2n-1)t \qquad (i=1, 2)$$

の形である．"

$u=u_i$　$(i=1, 2)$ のグラフは図示すると，つぎの通りである：



上の定理の証明を行うには，まず1より大きい任意の正の整数pをとり，tをptでおきかえて(E_0)をつぎのように書直す：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{p\sigma}{\omega}\frac{dx}{dt}+\frac{p^2}{\omega^2}x(1+\varepsilon x^2)=\frac{p^2}{\omega^2}\cos pt.$$

ここで

$$(1\cdot 6)\qquad \frac{p^2}{\omega^2}=\lambda,\quad \frac{p\sigma}{\omega}=\varepsilon\sigma_1$$

とおくと，つぎの方程式を得る：

$$(\mathrm{E})\qquad \frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon\sigma_1\frac{dx}{dt}+\lambda x(1+\varepsilon x^2)=\lambda\cos pt.$$

明らかに，(E_0)の$1/p$-次の*subharmonic solution*は(E)の周期2πの周期解に対応する．

つぎに，方程式(E)において，

$$(1\cdot 7) \qquad \lambda = \lambda_0 - \varepsilon\kappa$$

とおき，λ_0 のいろいろな値に応じて（E）の周期解の存否を調べる．このような方法で，上の定理は証明された．

2. $\lambda_0 = p^2$ の場合

このとき，（E）の非摂動系は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p^2 x = p^2 \cos pt$$

となる．これの一般解は

$$x = A\cos pt + B\sin pt + \frac{p}{2} t \sin pt$$

で，これは周期的ではない．したがって，$|\varepsilon|$ が十分小さいときは，$\varepsilon \to 0$ のとき $|x| \to \infty$ あるいは $|dx/dt| \to \infty$ となるものを除けば，（E）には周期 2π の周期解は存在しない．したがって，$\varepsilon \to 0$ のとき $|x| \to \infty$ あるいは $|dx/dt| \to \infty$ となるものを除けば，（E_0）には $1/p$ 一次の sub-harmonic solution は存在しない．

3. λ_0 が整数の平方でない場合

このとき，（E_0）はつぎの形である：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon\frac{\sigma_1}{p}\frac{dx}{dt}+\frac{1}{p^2}(\lambda_0-\varepsilon k)(x+\varepsilon x^3)=\frac{1}{p^2}(\lambda_0-\varepsilon k)\cos t.$$

したがって，これの非摂動系は，1階連立の形に書くと，つぎのようになる：

$$(3\cdot1)\qquad \frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{\lambda_0}{p^2}x+\frac{\lambda_0}{p^2}\cos t.$$

これの周期 $2p\pi$ の周期解はただ一つで，それはつぎの式で与えられる周期 2π のものだけである：

$$x=\frac{\lambda_0}{\lambda_0-p^2}\cos t,\quad y=-\frac{\lambda_0}{\lambda_0-p^2}\sin t.$$

さて，上の周期解に関する（3・1）の第一変分方程式は

$$(3\cdot2)\qquad \frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{\lambda_0}{p^2}x$$

である．（3・2）の基本行列で，$t=0$ のとき単位行列 I となるものを $\Phi(t)$ とすると，

$$\det\left[\Phi^p(2\pi)-I\right]=4\sin^2\pi\sqrt{\lambda_0}\neq 0$$

を得る．したがって，よく知られている摂動論の定理から，$\varepsilon\to0$ のとき $|x|\to\infty$ あるいは $|dx/dt|\to\infty$ となるものを除けば，周期 $2p\pi$ の（E_0）の周期解は，周期 2π の（E_0）の周期解以外には存在しない．いいかえると，$\varepsilon\to0$

のとき $|x|\to\infty$ あるいは $|dx/dt|\to\infty$ となるものを除けば，（E_0）には $1/p$ 一次の subharmonic solution は存在しない．

4. $\lambda_0=1$ の場合

このとき，（E）は1階連立の形に書くと，つぎのようになる：

$$
(4\cdot1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=-x+\cos pt+\varepsilon\,(\kappa x-x^3-\sigma_1 y-\kappa\cos pt+\varepsilon\kappa x^3). \end{cases}
$$

これの非摂動系の一般解は

$$
\begin{cases} x=A\cos t+B\sin t-\dfrac{1}{p^2-1}\cos pt, \\[2ex] y=-A\sin t+B\cos t+\dfrac{p}{p^2-1}\sin pt \end{cases}
$$

であるから，定数変化法によりA，Bを変数u，vでおきかえ，つぎの変数変換を行う：

$$
(4\cdot2)\quad \begin{cases} x=u\cos t+v\sin t-\dfrac{1}{p^2-1}\cos pt, \\ \end{cases}
$$

$$y = -u\sin t + v\cos t + \frac{p}{p^2-1}\sin pt.$$

（4・2）を（4・1）に代入すると，つぎの方程式を得る：

$$(4\cdot 3)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -\varepsilon f(u, v, t; \varepsilon)\sin t, \\[2ex] \dfrac{dv}{dt} = \varepsilon f(u, v, t; \varepsilon)\cos t. \end{cases}$$

ただし

$$(4\cdot 4)\qquad f(u, v, t; \varepsilon) = kx - x^3 - \sigma_1 y - k\cos pt + \varepsilon k x^3$$

で，このとき x，y は（4・2）の右辺の対応する式を表わしている．

（4・2）により，（4・1）の周期 2π の周期解には，（4・3）の周期 2π の周期解が対応する．（4・3）の周期解を求めるため，（4・3）の平均系

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -\dfrac{\varepsilon}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(u, v, t; 0)\sin t\,dt, \\[2ex] \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\varepsilon}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(u, v, t; 0)\cos t\,dt \end{cases}$$

を考える．（4・4）から，平均系はつぎのようになる：

$$
(4\cdot5)\quad
\begin{cases}
\dfrac{du}{dt} = \dfrac{\varepsilon}{2}\Big[\Big\{\dfrac{3}{4}u^2v + \dfrac{3}{4}v^3 + \dfrac{3}{2(p^2-1)^2}v \\
\qquad\qquad + \delta_p\cdot\dfrac{3}{2(p^2-1)}uv\Big\} - \kappa v - \tau_1 u\Big], \\
\dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{\varepsilon}{2}\Big[\Big\{\dfrac{3}{4}u^3 + \dfrac{3}{4}uv^2 + \dfrac{3}{2(p^2-1)^2}u \\
\qquad\qquad - \delta_p\cdot\dfrac{3}{4(p^2-1)}(u^2-v^2)\Big\} - \kappa u + \tau_1 v\Big].
\end{cases}
$$

ただし

$$
(4\cdot6)\qquad \delta_p = \begin{cases} 1 & \cdots\cdots\ p=3 \text{ のとき}, \\ 0 & \cdots\cdots\ p\neq 3 \text{ のとき}. \end{cases}
$$

(A) <u>$p\neq 3$ のとき</u>

平均系の critical point はつぎの方程式の解である：

$$
(4\cdot7)\quad
\begin{cases}
v\Big(\dfrac{3}{4}u^2 + \dfrac{3}{4}v^2 + \dfrac{3}{2(p^2-1)^2} - \kappa\Big) - \tau_1 u = 0, \\
u\Big(\dfrac{3}{4}u^2 + \dfrac{3}{4}v^2 + \dfrac{3}{2(p^2-1)^2} - \kappa\Big) + \tau_1 v = 0.
\end{cases}
$$

これより次の式を得る：

$$(4\cdot 8)\qquad \sigma_1(u^2+v^2)=0.$$

(A_1) $\sigma_1>0$ のとき

(4・8) より

$$(4\cdot 9)\qquad u=v=0.$$

これに関する (4・7) の左辺の Jacobian は

$$-\left[\sigma_1{}^2+\left\{\frac{3}{2(p^2-1)^2}-\kappa\right\}^2\right]\neq 0.$$

したがって，$|\varepsilon|$ が十分小さいときは，$\varepsilon\to 0$ のとき $|u|\to\infty$ あるいは $|v|\to\infty$ となるものを除けば，(4・3) の周期 2π の周期解はただ一つで，それはつぎの形で与えられる：

$$(4\cdot 10)\qquad u=\varepsilon\varphi(t,\varepsilon),\quad v=\varepsilon\psi(t,\varepsilon).$$

ところで，(1・6)，(1・7) により，いまの場合，(E_0) は

$$(4\cdot 11)\quad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\varepsilon\sigma_1}{p}\frac{dx}{dt}+\frac{1}{p^2}(1-\varepsilon\kappa)(x+\varepsilon x^3)=\frac{1}{p^2}(1-\varepsilon\kappa)\cos t$$

である．1階連立の形に書けば，

$$(4\cdot12)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{p^2}(1-\varepsilon k)(x+\varepsilon x^3)-\dfrac{\varepsilon\sigma_1}{p}y+\dfrac{1}{p^2}(1-\varepsilon k)\cos t \end{cases}$$

である．これの非摂動系は

$$(4\cdot13)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{p^2}x+\dfrac{1}{p^2}\cos t \end{cases}$$

で，これはつぎの周期 2π の周期解をもっている：

$$x=-\frac{1}{p^2-1}\cos t,\quad y=\frac{1}{p^2-1}\sin t.$$

この周期解に関する（4・13）の第一変分方程式は

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{1}{p^2}x$$

で，これの $t=0$ のとき単位行列 I となる基本行列を $\Phi(t)$ とすれば，

$$\det\left[\Phi(2\pi)-I\right]=4\sin^2\frac{\pi}{p}\neq 0$$

を得る．したがって，(4.12)はつぎの形の周期2πの周期解をもっている：

$$
(4.14)\quad
\begin{cases}
x = -\dfrac{1}{p^2-1}\cos t + \varepsilon \bar{x}(t, \varepsilon), \\[2ex]
y = \dfrac{1}{p^2-1}\sin t + \varepsilon \bar{y}(t, \varepsilon).
\end{cases}
$$

すると，tをptでおきかえて，つぎの形の(E)の周期解を得る：

$$
x = -\frac{1}{p^2-1}\cos pt + \varepsilon \bar{x}(pt, \varepsilon).
$$

したがって，つぎの形の(4.1)の解を得る：

$$
(4.15)\quad
\begin{cases}
x = -\dfrac{1}{p^2-1}\cos pt + \varepsilon \bar{x}(pt, \varepsilon), \\[2ex]
y = \dfrac{p}{p^2-1}\sin pt + \varepsilon \bar{y}(pt, \varepsilon).
\end{cases}
$$

これと(4.2)を比較すると，いまの場合，対応するu，vは(4.10)の形である．すると(4.10)の形の解の一意性から，はじめに得られた解は(4.15)の形の解でなければならないことになる．(4.15)の解は(4.14)に対応するもので，これは(E_0)の周期2πの周期解に対応するもので

ある．したがって，これは subharmonic solution に対応するものではない。

以上のことから，いまの場合には，$\varepsilon \to 0$ のとき $|x| \to \infty$ あるいは $|dx/dt| \to \infty$ となるものを除けば，subharmonic solution は存在しないことがわかる．

(A$_2$) $\underline{r_1 = 0 \text{ のとき}}$

(4・7) より，平均系の critical point に対しては，

$$(4.16) \qquad \frac{3}{4}u^2 + \frac{3}{4}v^2 + \frac{3}{2(p^2-1)^2} - \kappa = 0$$

か，そうでなければ

$$(4.17) \qquad u = v = 0$$

である．ところが，(4.16) をみたすものに対しては，(4・7) の左辺の Jacobian は 0 である．したがって，これに対応しては，系の小さな disturbance に対して，(4・3) の周期解はつねに存在するとは限らない．したがって，(4.16) をみたす critical point に対応しては generic な subharmonic solution は得られない．(4.17) をみたすものに対しては，

$$(4\cdot18)\qquad \varkappa=\frac{3}{2(p^2-1)^2}$$

である場合を除けば，(4・7)の左辺のJacobianは0でないから，(A_1)のときの議論がそのまま成り立つ．したがってこのときにも，subharmonic solutionは得られない．(4・18)が成り立つときには，Jacobianが0になるので，generic な subharmonic solutionはまた得られない．

以上のことから，いまの場合には，結局，$\varepsilon\to0$のとき$|x|\to\infty$または$|dx/dt|\to\infty$となるものを除けば，generic な subharmonic solutionは存在しないことになる．

［注］実際現象では，つねに小さなdampingは存在するので，(A_2)は実際現象の解説には不要であろう．

（B）$p=3$ のとき

このときは，(1・6)，(1・7)から，明らかに

$$1-\left(\frac{3}{\omega}\right)^2=\varepsilon\varkappa$$

である．

さて，平均系(4・5)のcritical pointに対する方程

式は，いまの場合，つぎのようになる：

$$(4\cdot19)\begin{cases} v\left(\frac{3}{4}u^2+\frac{3}{4}v^2+\frac{3}{128}-\kappa\right)+\frac{3}{16}uv-\sigma_1 u=0, \\ u\left(\frac{3}{4}u^2+\frac{3}{4}v^2+\frac{3}{128}-\kappa\right)-\frac{3}{32}(u^2-v^2)+\sigma_1 v=0. \end{cases}$$

(B_1)　$\sigma_1=0$ のとき

このとき，(4・19) の解はつぎのようになる：

(α)　$u=v=0$,

(β)　$v=0$,　$u=u_i$　$(i=1, 2)$,

(γ)　$v=\pm\sqrt{3}\,u$,　$u=u_i$　$(i=3, 4)$.

ただし，u_1，u_2 は (1・3) で与えられる値であり，u_3，u_4 はつぎの式で与えられる値である：

$$(4\cdot20)\begin{cases} u_3=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{16}-\sqrt{\frac{4}{3}\left(\kappa-\frac{21}{1024}\right)}\right], \\ u_4=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{16}+\sqrt{\frac{4}{3}\left(\kappa-\frac{21}{1024}\right)}\right]. \end{cases}$$

(α) に対する (4・19) の左辺の Jacobian は

$$(4\cdot21)\qquad \kappa=3/128$$

である場合を除けば，0ではない．このJacobianが0でないときは，(A_1)によって，(α)に対応する(E)の周期解は(E_0)のsubharmonic solutionにはならない．このことから，(α)に対応してはgeneric なsubharmonic solutionは現われない．

(β)に対する$(4\cdot19)$の左辺のJacobianは

$$(4\cdot22)\qquad \kappa=21/1024,\ 3/128$$

である場合を除けば，0ではない．このJacobianが0でないときは，$(4\cdot3)$は周期2πの周期解をもち，したがって，$(4\cdot2)$により，(E_0)は$(1\cdot2)$の形の1/3一次のsubharmonic solutionをもつ．なお，このとき，$(4\cdot5)$の右辺のJacobian matrixの固有値λに対する方程式は，つぎのようになる：

$$\lambda^2+\frac{\varepsilon^2}{4}\cdot\frac{27}{64}\cdot u_i^2\left(u_i-\frac{1}{16}\right)=0\qquad (i=1,2).$$

$(1\cdot3)$から，$u_1>1/16$，$u_2<1/16$であるから，$u=u_1$に対してはλはともに純虚数になり，これに対応するsubharmonic solutionは中立安定となり，$u=$

u_2 に対しては，λ は一つは正，他は負となり，これに対応する subharmonic solution は不安定となる．

(γ) に対する (4·19) の左辺の Jacobian は，(4·22) の場合を除くと，やはり 0 でない．したがって，(4·22) の場合を除くと，(γ) に対応して (4·3) の周期 2π の周期解が得られ，したがって (E_0) の 1/3 – 次の subharmonic solution が得られる．ところが，(E_0) の形からわかるように，$x_i(t)$ は (E_0) の最小周期 6π の周期解であるから，$x_i(t+2\pi)$，$x_i(t+4\pi)$ も周期 6π の周期解になり，しかもこれらは互に異なってくる．すると，これらに対応して，前のものとは異なる (4·3) の周期解 (u, v) が得られ，$\varepsilon \to 0$ のときのそれらの極限は (β) と異なる (4·5) の critical point となる．それらは (γ) に他ならない．(γ) に対応する (4·3) の周期解はそれぞれ一意的に定まるから，結局 (γ) に対応する (E_0) の subharmonic solution は $x_i(t+2\pi)$，$x_i(t+4\pi)$ に他ならないことがわかる．

さて，(4·2)，(4·4) から，$r_1 = 0$ のときは，

$$(4{\cdot}23)\quad \begin{cases} f(u, v, -t; \varepsilon) = f(u, -v, t; \varepsilon), \\ f(u, v, t+\pi; \varepsilon) = -f(u, v, t; \varepsilon) \end{cases}$$

が成り立つ．したがって，$(u(t), v(t))$ が $(4\cdot 3)$ の周期 2π の周期解ならば，$(u(-t), -v(-t))$ も $(u(t+\pi), v(t+\pi))$ もまた $(4\cdot 3)$ の周期 2π の周期解である．いま $(u(t), v(t))$ を (β) に対応する周期解であるとすると，$\varepsilon \to 0$ のとき，

$$u(-t),\ u(t+\pi) \to u_i, \quad -v(-t),\ v(t+\pi) \to 0$$

であるから，$(4\cdot 22)$ の場合を除けば，$(u(t), v(t))$ の一意性から，

$$\begin{cases} u(-t) = u(t+\pi) = u(t), \\ -v(-t) = v(t+\pi) = v(t) \end{cases}$$

となる．すると，$u(t)$, $v(t)$ の Fourier 級数は

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos 2nt, \quad v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin 2nt$$

の形になり，したがって，$(4\cdot 2)$ により，(β) に対応する (E_0) の subharmonic solution $x_i(t)$ $(i=1,2)$ の Fourier 級数は $(1\cdot 5)$ の形になる．

(B_2) $\underline{\sigma_1 > 0 \text{ のとき}}$

σ_1 は十分小さいとする．すると，$(4\cdot 19)$ の

解は，$\sigma_1 \to 0$ のとき $|u| \to \infty$ あるいは $|v| \to \infty$ となるものを除けば，$\sigma_1 = 0$ のときの解の近くにある．

まず，(α) の近くにある解を考えよう。(4・19) から明らかなように，$u = v = 0$ は (4・19) の解である．しかもこの解に対しては，(4・19) の左辺の Jacobian は

$$-\left[\sigma_1^2 + \left(\frac{3}{128} - k\right)^2\right] \neq 0$$

である．ところがこの場合には，(A_1) によって $u = v = 0$ に対応する (E) の周期解は (E_0) の subharmonic solution にはならない．したがってこの場合には，(E_0) の subharmonic solution は現われない．

(β) の近くにある解を考えよう．このときは，(4・22) の場合を除くと，(4・19) の左辺の Jacobian は $\sigma_1 = 0$ に対して 0 でないから，十分小さな σ_1 に対して

$$\begin{cases} u = \hat{u}_i = u_i + \sigma_1 \overline{u}_i(\sigma_1), \\ v = \hat{v}_i = \sigma_1 v_i(\sigma_1) \end{cases} \qquad (i=1,2)$$

の形の (4・19) の解が一意的に定まる．上の式を (4・19) に代入して計算すると，上の式は実はつぎの形になることが容易にわかる：

$$(\beta')\quad \begin{cases} u=\hat{u}_i = u_i + \sigma_1{}^2\,\overline{u}_i(\sigma_1), \\ v=\hat{v}_i = \dfrac{32}{9}\sigma_1 + \sigma_1{}^2 v_i(\sigma_1) \end{cases}$$

$$(i=1,2).$$

(β') に対しては，σ_1 が十分小さければ，(4·22) の場合を除けば，(4·19) の左辺の Jacobian は 0 ではない．したがって (4·2) から (E_0) は (1·2) の形の 1/3-次の subharmonic solution をもつことがわかる．なおこのとき，(4·5) の右辺の Jacobian matrix の固有値λに対する方程式はつぎのようになる：

$$\lambda^2+\varepsilon\sigma_1\lambda+\frac{\varepsilon^2}{4}\left[\frac{27}{64}u_i^2\left(u_i-\frac{1}{16}\right)+O(\sigma_1{}^2)\right]=0$$

$$(i=1,2).$$

これより

$$\lambda=\frac{\varepsilon}{2}\left[-\sigma_1\pm\sqrt{-\frac{27}{64}u_i^2\left(u_i-\frac{1}{16}\right)+O(\sigma_1{}^2)}\right]$$

$$(i=1,2).$$

$u=u_1$ に対しては $u_1>1/16$ であるから，λの実部は $-\varepsilon$ と同符号になり，これに対応する subharmonic solution は ε の正，負にしたがってそれぞれ正または負に漸近安定となり，$u=u_2$ に対しては $u_2<1/16$ であ

るから，λの一つは正，他は負となり，これに対応する subharmonic solution は不安定となる．

(γ) の近くにある $(4\cdot19)$ の解に関しては，(B_1) で述べたことがそのまま成り立つ．すなわち，(β') に対応して得られた (E_0) の subharmonic solution を $x_i(t)$ とするとき，$x_i(t+2\pi)$，$x_i(t+4\pi)$　$(i=1, 2)$ が (γ) の近くにある $(4\cdot19)$ の解に対応する (E_0) の subharmonic solution になる．

$\Gamma_1 \neq 0$　のときは，$(4\cdot23)$ の第1式は成り立たないが，第2式は成り立つ．したがって，$(4\cdot22)$ の場合を除けば，(β') に対応する $(4\cdot3)$ の周期解に対して

$$u(t+\pi)=u(t),\quad v(t+\pi)=v(t)$$

が成り立つ．すると，$u(t)$，$v(t)$ の Fourier 級数は，ともに

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos 2nt + b_n \sin 2nt)$$

の形になる．したがって $(4\cdot2)$ により，(β') に対応する (E_0) の subharmonic solution $x_i(t)$　$(i=1, 2)$ の Fourier 級数は $(1\cdot4)$ の形になる．

5. $\lambda_0 = q^2$ の場合（q は正の整数で，$q \neq p, 1$）

このときは，(1·7) により，方程式 (E) はつぎの形である：

$$(5\cdot1)\quad \frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon\sigma_1\frac{dx}{dt}+(q^2-\varepsilon\kappa)(x+\varepsilon x^3)=(q^2-\varepsilon\kappa)\cos pt.$$

整数 p, q の最大公約数を r とし，$p=rp_1$，$q=rq_1$ とおく．すると，(5·1) は

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon\sigma_1\frac{dx}{dt}+r^2(q_1{}^2-\varepsilon\kappa_1)(x+\varepsilon x^3)$$
$$=r^2(q_1{}^2-\varepsilon\kappa_1)\cos p_1 rt$$

と書かれるので，$rt=t_1$ とおくと，

$$(5\cdot2)\quad \frac{d^2x}{dt_1{}^2}+\varepsilon\sigma_2\frac{dx}{dt_1}+(q_1{}^2-\varepsilon\kappa_1)(x+\varepsilon x^3)$$
$$=(q_1{}^2-\varepsilon\kappa_1)\cos p_1t_1$$

を得る．もちろん，このとき，$(p_1, q_1)=1$，$p_1\neq q_1$ で

$$(5\cdot3)\quad \sigma_2=\sigma_1/r,\quad \kappa_1=\kappa/r^2$$

である．(5·1) の周期 2π の周期解には明らかに (5·2) の

周期 $2\pi r$ の周期解が対応する．したがって (E_0) の $1/p$ 次の subharmonic solution を求めるには，(5.2) の周期 $2\pi r$ の周期解を求めればよいことになる．

(5.2) を1階連立の形に書くと，

$$(5.4)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt_1} = y, \\ \dfrac{dy}{dt_1} = -q_1^2 x + q_1^2 \cos p_1 t_1 + \varepsilon(\kappa_1 x - q_1^2 x^3 - \sigma_2 y \\ \qquad\qquad - \kappa_1 \cos p_1 t_1 + \varepsilon \kappa_1 x^3) \end{cases}$$

を得る．これの非振動系の一般解は

$$\begin{cases} x = A\cos q_1 t_1 + B\sin q_1 t_1 + \dfrac{q_1^2}{q_1^2 - p_1^2}\cos p_1 t_1, \\ y = -q_1 A\sin q_1 t_1 + q_1 B\cos q_1 t_1 - \dfrac{p_1 q_1^2}{q_1^2 - p_1^2}\sin p_1 t_1 \end{cases}$$

であるから，第4節にならって，つぎの変数変換を考える：

$$(5.5)\quad \begin{cases} x = u\cos q_1 t_1 + v\sin q_1 t_1 + \dfrac{q_1^2}{q_1^2 - p_1^2}\cos p_1 t_1, \\ y = -q_1 u\sin q_1 t_1 + q_1 v\cos q_1 t_1 - \dfrac{p_1 q_1^2}{q_1^2 - p_1^2}\sin p_1 t_1. \end{cases}$$

すると，(4.3) に対応して，いまの場合つぎの方程式を得

る：

$$(5.6)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt_1} = -\dfrac{\varepsilon}{q_1} f(u, v, t_1; \varepsilon)\sin q_1 t_1, \\[2ex] \dfrac{dv}{dt_1} = \dfrac{\varepsilon}{q_1} f(u, v, t_1; \varepsilon)\cos q_1 t_1. \end{cases}$$

ただし

$$(5.7)\quad f(u, v, t_1; \varepsilon) = \kappa_1 x - q_1^2 x^3 - \sigma_2 y - \kappa_1 \cos p_1 t_1 + \varepsilon \kappa_1 x^3$$

で，このとき x，y は (5.5) の右辺の対応する式を表わしている．

(5.4) の周期 2π あるいは $2\pi r$ の周期解には，(5.6) の対応する周期解が対応する．そこで (5.6) の平均系をつくると，それは周期 2π についても，$2\pi r$ についても同形で，つぎのようになる：

$$(5.8)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt_1} = -\dfrac{\varepsilon}{q_1}\cdot\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(u, v, t_1; 0)\sin q_1 t_1\, dt_1, \\[2ex] \dfrac{dv}{dt_1} = \dfrac{\varepsilon}{q_1}\cdot\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(u, v, t_1; 0)\cos q_1 t_1\, dt_1. \end{cases}$$

(5.7) から，(5.8) はつぎのようになる：

$$(5.9)\begin{cases}\dfrac{du}{dt_1}=\dfrac{\varepsilon}{2q_1}\Big[q_1^2\Big\{\dfrac{3}{4}u^2v+\dfrac{3}{4}v^3+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{q_1^4}{(q_1^2-p_1^2)^2}\cdot v \\ \qquad -\delta_1\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{q_1^2}{q_1^2-p_1^2}\cdot uv\Big\}-\kappa_1 v-\sigma_2 q_1 u\Big], \\ \dfrac{dv}{dt_1}=-\dfrac{\varepsilon}{2q_1}\Big[q_1^2\Big\{\dfrac{3}{4}u^3+\dfrac{3}{4}uv^2+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{q_1^4}{(q_1^2-p_1^2)^2}\cdot u \\ \qquad +\delta_1\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{q_1^2}{q_1^2-p_1^2}\cdot(u^2-v^2)+\delta_2\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{q_1^6}{(q_1^2-p_1^2)^3}\Big\} \\ \qquad -\kappa_1 u+\sigma_2 q_1 v\Big].\end{cases}$$

ただし

$$\delta_1=\begin{cases}1\cdots & p_1=3,\ q_1=1\ のとき, \\ 0\cdots & 以外のとき,\end{cases}\qquad \delta_2=\begin{cases}1\cdots & p_1=1,\ q_1=3\ のとき, \\ 0\cdots & 以外のとき.\end{cases}$$

(A) <u>$\delta_1=\delta_2=0$ のとき</u>

このとき，平均系の critical point はつぎの方程式の解である：

$$(5.10)\begin{cases}v\Big[q_1^2\Big(\dfrac{3}{4}u^2+\dfrac{3}{4}v^2+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{q_1^4}{(q_1^2-p_1^2)^2}\Big)-\kappa_1\Big] \\ \qquad -\sigma_2 q_1 u=0,\end{cases}$$

$$\left| \; u\left[q_1^2\left(\frac{3}{4}u^2+\frac{3}{4}v^2+\frac{3}{2}\cdot\frac{q_1^4}{(q_1^2-p_1^2)^2}\right)-\kappa_1\right] \right.$$
$$+\sigma_2 q_1 v=0.$$

これより

$$(5.11)\qquad \sigma_2 q_1(u^2+v^2)=0$$

を得る.

(A_1) $\underline{\sigma_2>0 \text{ のとき}}$

(5.11) より

$$(5.12)\qquad u=v=0.$$

これに関する (5.10) の左辺の Jacobian は

$$-\left[\sigma_2^2 q_1^2+\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{q_1^6}{(q_1^2-p_1^2)^2}-\kappa_1\right)^2\right]\neq 0.$$

したがって, $|\varepsilon|$ が十分小さいときは, $\varepsilon\to 0$ のとき $|u|\to\infty$ あるいは $|v|\to\infty$ となるものを除けば, (5.6) の周期 2π および $2\pi r$ の周期解はそれぞれただ一つで, それらはいずれもつぎの形で与えられる:

$$(5.13)\qquad u=\varepsilon\varphi(t_1,\varepsilon),\quad v=\varepsilon\psi(t_1,\varepsilon).$$

ところが，(5.6)の周期2πの周期解は明らかに周期$2\pi r$もっているから，周期解の一意性から，(5.6)の周期$2\pi r$の周期解は，$\varepsilon\to 0$のとき$|u|\to\infty$あるいは$|v|\to\infty$となるものを除けば，(5.13)の形の周期2πの周期解以外にはないことになる．このような解に対応する(5.2)の解は(5.5)から，つぎの形である：

$$(5.14)\qquad x=\frac{q_1^2}{q_1^2-p_1^2}\cos p_1t_1+\varepsilon\bar{x}(t_1,\varepsilon).$$

さて，$p_1\neq 1$のときは，$p_1t_1=t_2$とおけば，(5.2)はつぎのように書直される：

$$(5.15)\qquad \frac{d^2x}{dt_2^2}+\frac{\varepsilon\sigma_2}{p_1}\frac{dx}{dt_2}+\frac{1}{p_1^2}(q_1^2-\varepsilon\kappa_1)(x+\varepsilon x^3)$$
$$=\frac{1}{p_1^2}(q_1^2-\varepsilon\kappa_1)\cos t_2.$$

この方程式は(4.11)に似た形で，しかもいまの場合，$(p_1,q_1)=1$，$p_1\geqq 2$であるから，(4.11)のときと同様に，(5.15)はつぎの形の周期2πの周期解をもっていることが証明される：

$$x = \frac{q_1^2}{q_1^2 - p_1^2} \cos t_2 + \varepsilon \hat{x}(t_2, \varepsilon).$$

すると，$t_2 = p_1 t_1$ とおくことによって，(5.2)は

$$(5.16) \qquad x = \frac{q_1^2}{q_1^2 - p_1^2} \cdot \cos p_1 t_1 + \varepsilon \grave{x}(p_1 t_1, \varepsilon)$$

の形の，周期 2π の周期解をもっていることがわかる．これは (5.14) の形であるから，(5.14) の形の周期解の一意性から，(5.14) の周期解は実は (5.16) の形であることがわかる．

$p_1 = 1$ のときは，(5.14)は明らかにまた (5.16)の形であるから，結局，(5.12) に対応する (5.2)の周期 $2\pi r$ の周期解はつねに (5.16)の形になることがわかる．すると，$t_1 = rt$ であるから，(5.16) はつぎの形になる：

$$\begin{aligned} x &= \frac{q_1^2}{q_1^2 - p_1^2} \cdot \cos p_1 r t + \varepsilon \grave{x}(p_1 r t, \varepsilon) \\ &= \frac{q_1^2}{q_1^2 - p_1^2} \cdot \cos p t + \varepsilon \hat{x}(p t, \varepsilon). \end{aligned}$$

これは (E_0) の周期 2π の周期解に対応するものである．

したがってこれは (E_0) の subharmonic solution ではない。

以上のことから，(5.12) に対応しては，(E_0) の subharmonic solution は現われないことがわかる．

(A_2) $\sigma_2 = 0$ のとき

このときは，(5.10) の解は

$$(5.17)\qquad q_1^2\left(\frac{3}{4}u^2+\frac{3}{4}v^2+\frac{3}{2}\cdot\frac{q_1^4}{(q_1^2-p_1^2)^2}\right)-\varkappa_1=0$$

か，そうでなければ

$$(5.18)\qquad u=v=0$$

である．ところが，(5.17) をみたすものに対しては，(5.10) の左辺の Jacobian は 0 である．したがって，これに対応しては generic な subharmonic solution は現われない．

また (5.18) に対しては

$$(5.19)\qquad \varkappa_1=\frac{3}{2}\cdot\frac{q_1^6}{(q_1^2-p_1^2)^2}$$

である場合を除くと，Jacobian は 0 でないが，このときは

(A_1) と同様になって，(E_0) の subharmonic solution は再び現われない．

以上のことから，いまの場合には，subharmonic solution を generic なものに限るならば，$t\to 0$ のとき $|x|\to\infty$ あるいは $|dx/dt|\to\infty$ となるものを除けば，subharmonic solution は現われないことがわかる．

(B) $\delta_1=1$ のとき ($p_1=3$, $q_1=1$)

このとき，(5・2) は，(E) で $\lambda_0=1$, $p=3$ である場合と同じになる．したがって第4節 (B) により

$$(5\cdot 20) \qquad \varkappa_1 = 21/1024,\ 3/128$$

である場合を除けば，(5・2) の周期 2π の周期解が6個存在する．いま，その任意の一つを $x=f(t_1)$ とすると，これに対しては

$$x=f(t_1)=f(rt)=f(pt/3)$$

となるから，これは (E_0) の 1/3 次の subharmonic solution に対応することになる．

いまの場合，(1・6)，(1・7) により

$$\frac{1}{\omega^2}=\frac{1}{p^2}(q^2-\varepsilon\kappa)=\frac{1}{p_1^2}(q_1^2-\varepsilon\kappa_1)=\frac{1}{3^2}(1-\varepsilon\kappa_1)$$

であるから，

$$1-\left(\frac{3}{\omega}\right)^2=\varepsilon\kappa_1$$

となる．これは(1・1)の第1式と同形である．したがって，いまの場合の結果は，(E)で $\lambda_0=1$, $p=3$ であるときと，すべて同じになる．

(C) $\delta_2=1$ のとき ($p_1=1$, $q_1=3$)

この場合，(5・2)の周期 2π の任意の周期解を $x=f(t_1)$ とすると，$p_1=1$ であるから，

$$x=f(rt)=f(pt)$$

となり，これは(E_0)の周期 2π の周期解に対応する．したがって，この場合には，(E_0)の generic な subharmonic solution は現われてこない．

以上，第2～5節の結果から，第1節で述べた定理が得られる．